IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL TRIGONOMÉTRICO

María del Pilar Beltrán Soria, Gisela Montiel Espinosa

Resumen

En este documento presentamos el avance de una investigación cuyo objeto de estudio es el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. La investigación se basa en la puesta en escena de una secuencia didáctica, fundamentada principalmente en la Socioepistemología, retomando situaciones-problema que demandan del razonamiento covariacional en una actividad de modelación matemática. El diseño tiene el principio instruccional de la resignificación de las propiedades de la función trigonométrica, y el presente avance reporta la fundamentación, el diseño y los datos obtenidos.

Palabras claves: Pensamiento funcional trigonométrico, resignificación, función trigonométrica, investigación basada en el diseño.

Introducción

Esta investigación se está llevando a cabo en el Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal, cuyo programa de Matemáticas busca que:

> …el estudiante perciba la matemática como una ciencia construida a través de los siglos, como algo más que conocimientos acumulados o aplicaciones prácticas, es decir, que el estudiante construya la matemática, que la descubra que invente y que discuta, que construya un método de análisis y razonamiento, que desarrolle su creatividad y explique sus resultados; además de presentar a la matemática no como una serie de reglas fórmulas y algoritmos que el estudiante deba aprender de memoria para luego aplicarlas en la resolución de problemas. (IEMS, 2006, página 3)

La experiencia didáctica reportada en (Beltrán, 2013) mostró la viabilidad de este enfoque, a partir del diseño y organización de una secuencia didáctica basada en una *anidación de prácticas*. Más aún, la investigación mostró que los estudiantes que participaron en dicha experiencia lograron construir, en el sentido de Confrey y Maloney (2007), la funcionalidad trigonométrica a partir de la matematización del movimiento de un péndulo. Desde el diseño didáctico original (Montiel y Buendía, 2013) se busca intencionalmente la resignificación de la función trigonométrica, con el estudio de este movimiento particular, al seno de la matemática escolar, es decir, de aquello que da uso y sentido a la función.

Con esa misma intencionalidad proponemos ahora implementar una nueva secuencia didáctica para estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en estudiantes de nivel medio superior, profundizando particularmente en el *acercamiento variacional* al estudio del movimiento, en donde se reconozca que el comportamiento trigonométrico se caracteriza y se distingue de otros comportamientos (algebraicos o trascendentes) por su variación y sus variaciones sucesivas, esto es, por cómo cambia y cómo cambian sus cambios. Para esta secuencia se retoma el problema de Moore (2014), sobre la rueda de la fortuna:

"The Ferris wheel problem. Consider a Ferris wheel with a radius of 36 feet that takes 1.2 minutes to complete a full rotation. April boards the Ferris wheel at the bottom and begins a continuous ride on the Ferris wheel. Sketch a graph and determine a formula that relates the total distance traveled by April and her vertical distance from the bottom of the Ferris wheel (assume this is at ground level)"

Pero a diferencia de éste no nos preguntamos si el estudiante tiene ya desarrollados los razonamientos cuantitativo y covariacional, sino cómo pueden desarrollarse durante la secuencia, considerando los elementos de la funcionalidad-trigonométrica que proponen Montiel y Buendía (2013). Incorporamos, además, elementos didácticos de Moore y Laforest (2014) y de Ôzgun-Kara, Edwards y Meagher (2013), así como del trabajo de Beltrán (2013).

Fundamento teórico

Funcionalidad Trigonométrica

Se trata de una propuesta teórica que describe los elementos de desarrollo del pensamiento matemático relacionado con la noción escolar de función trigonométrica, construida particularmente para las funciones seno y coseno; y establece que el estudiante construye dicha funcionalidad cuando:

i. Estudia lo trigonométrico desde un *acercamiento variacional al movimiento oscilatorio*, en donde se reconozca que el comportamiento trigonométrico se caracteriza, y se distingue de otros comportamientos (algebraicos o trascendentes) por su variación y sus variaciones sucesivas, esto es, por como cambia y cómo cambian sus cambios.

ii. Identifica una unidad mínima de análisis del comportamiento, que le permite predecir. Al trabajar con objetos periódicos, lo que favorece la predicción es una distinción entre el *se repite* y el cómo *se repite.*

iii. Reconoce *lo acotado* del comportamiento en el análisis de los datos respecto del experimento.

iv. Hace uso de la *unidad de medida* adecuada a la experiencia y la reconoce, en la relación tiempo-distancia, en la representación gráfica de los datos obtenidos del experimento.

Uso de gráficas

Retomamos el planteamiento de Buendía (2012) sobre el *uso de la* gráfica, para referirse a ésta como un objeto matemático que es necesario conocer para lograr su construcción, su utilización como modelo o su interpretación. La autora afirma que la gráfica antecede a la función misma, y que no es necesario conocer la complejidad o precisión propias de la estructura matemática para poner un conocimiento en uso. Articulamos este planteamiento con los usos *Elemento interactivo y Estructura matemática* que reportan Lacasta y Pascual (1998). Para estos autores, el uso como elemento interactivo se da cuando el gráfico funciona como medio de control de la comunicación y de determinación de otro objeto. Este funcionamiento tiene lugar cuando la respuesta a un problema se obtiene mediante la relación efectiva con el gráfico. Por otro lado, el uso como estructura matemática le da a los marcos gráfico y algebraico un uso equilibrado poniendo en juego nuevos saberes.

La articulación asumirá la graficación como una forma de construcción y tratamiento del universo de formas gráficas asociadas a las funciones, en donde se represente, transforme, genere, comunique, documente y refleje información gráfica, numérica, geométrica, algebraica y/o analítica. La visualización en actividad de graficación se entenderá entonces como la producción del que construye (el universo de formas gráficas y la información que de la actividad se desprenden) y el conjunto de argumentos orales y escritos que conforman la explicación y solución a una situación problema. Ejemplo de estas articulaciones las encontramos en las *operaciones gráficas* que proponen Cantoral y Montiel (2014).

Método

Se prepararon hojas de trabajo con la secuencia didáctica, dividida en tres actividades, que incluían el espacio suficiente para los procedimientos, los dibujos, las respuestas y los argumentos verbales solicitados para dar respuesta a las preguntas de cada actividad. Al finalizar una actividad se les presentaban las hojas de la siguiente.

La experiencia se llevó a cabo dentro de un curso de Precálculo en la Preparatoria Iztapalapa 1 del IEMS, para que esta actividad fuera parte del curso se decidió tomar como base el libro Matemáticas Preuniversitarias de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2007), en el cual se presentan situaciones que buscan la construcción de nuevos significados a ciertas nociones matemáticas relacionadas con el estudio del movimiento y cambio, por lo que se integra coherentemente con la secuencia didáctica.

Población y escenario escolar

La implementación de la secuencia se llevó a cabo con 23 estudiantes de dos grupos, en el año 2014, y con 28 estudiantes de dos grupos, en el año 2015. Ambas experiencias se llevaron a cabo durante el curso de Matemáticas IV, al que le antecede el curso de Matemáticas III donde se abordan funciones y ecuaciones cuadráticas.

La secuencia didáctica

El diseño de la secuencia se organizó en actividades, cada una con tareas distintas.

1. **Actividad 1**.Construcción de círculos con diferentes radios y medición de los arcos de circunferencia con hilo o estambre (Fotografía 1), para obtener una relación con la cual calcular la longitud de los arcos subtendidos por distintos ángulos centrales (Fotografía 2)
2. **Actividad 2**. Construcción gráfica, con espaguetis, de la distancia de cualquier punto sobre la circunferencia al eje horizontal
3. **Actividad 3**. Resolver el problema de la rueda de la fortuna (tomado de Moore, 2014). Esta actividad explora la relación, en el moviemiento de una rueda de la fortuna de 9 metros de radio, entre la distancia recorrida de un pasajero con su altura al suelo en el transcurso de un paseo que tarda 1.2 minutos en dar una vuelta completa. A continuación, una descripción general de las tareas que solicita la actividad:
   - **T1.** Se solicita que representen 4 diferentes situaciones mediante dibujos cuando se ha dado una fracción de vuelta

- **T2.** Se pide que se marque la distancia recorrida (arco de circunferencia) y la distancia al suelo, suponiendo que la parte inferior de la rueda se encuentra a cero metros del suelo, en diferentes colores sobre los dibujos de la parte 1.
- **T3.** Se pide obtener el ángulo central al que se encuentra la persona que ha dado las fracciones de vuelta dibujadas.
- **T4.** Se pide contestar una serie de preguntas usando los datos del problema y los dibujos realizados. Las preguntas se relacionan al número de vueltas y las distancias al suelo alcanzadas y el número de veces que se alcanza cada distancia durante el paseo.
- **T5 y T6.** Se pide ubicar aproximadamente los puntos donde se alcanza la altura máxima, donde toca el suelo y donde alcanza los 9 metros de altura en un plano con el eje horizontal indicando las vueltas y el eje vertical la distancia al suelo.
- **T7.** Se pide trazar un círculo a una escala conveniente que representa la rueda de la fortuna y una recta que represente el suelo.
- **T8.** Se pide usar el círculo de la parte 7 para obtener en algunas fracciones de vuelta distancias recorridas y distancias al suelo.
- **T9.** Se pide graficar dr contra ds, y se pide llenar una tabla donde se sacan razones de cambio de ds/dr, para los datos de la parte 8.
- **T10.** Se pide llenar una tabla que va cada 15° donde se indique la parte de vuelta, la distancia recorrida, la distancia al suelo y la razón de cambio, para finalmente graficarla en un plano.

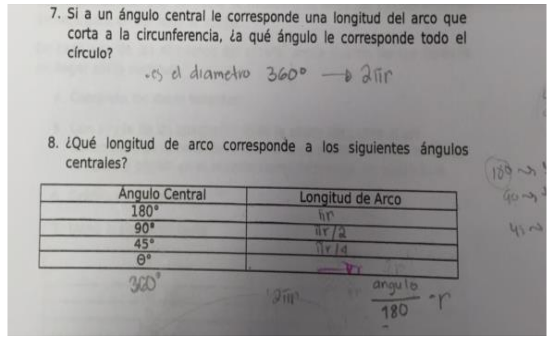
Experiencia de aula, para la recolección de datos

Contamos con un total de 9 horas de registro en video y las hojas de trabajo de los 4 grupos. Presentamos en este extenso una primera descripción de la experiencia, por actividad, con algunas de las evidencias más representativas de la dinámica de trabajo que pretendíamos lograr con la secuencia. Actualmente nos encontramos organizando los datos, para hacer el análisis de cada una de las actividades, a la luz de nuestros referentes teóricos. Aunado a ello, la evidencia empírica nos mostró la necesidad por incorporar referentes teóricos como el *razonamiento proporcional*, para el análisis de ciertos momentos de la secuencia.

Actividad 1

Los estudiantes lograron obtener una forma de medir la longitud de arco, guiados por tareas que incluían manualidades (Fotografía 1) y cálculos (Fotografía 2).

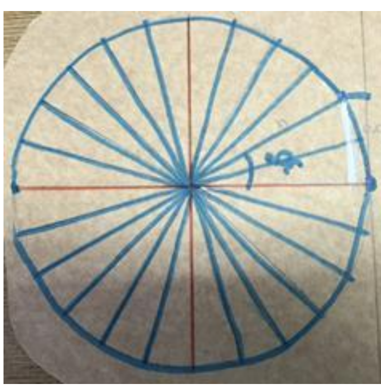
Fotografía 1



Fotografía 2

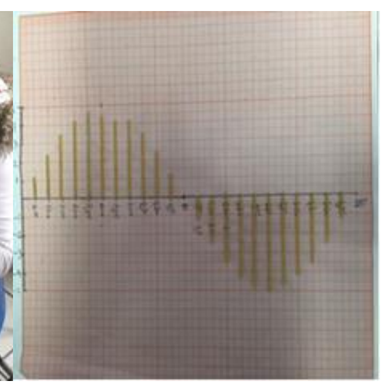
Actividad 2

Los estudiantes construyeron la gráfica cortando espaguetis del tamaño de la distancia de cada punto sobre la circunferencia al eje horizontal como lo indica la Fotografía 3, posteriormente los pegaron en una hoja milimétrica como aparece en la Fotografía 4, cuando tenían la gráfica y obtuvieron la medida de los espaguetis con una regla, se les preguntó ¿cómo calcularían ese valor sin necesidad de medirlo con la regla?, posteriormente se les solicitó que identificaran un punto sobre la circunferencia y dibujaran un triángulo con uno de sus lados como el radio y otro la altura hacia el diámetro del círculo, como se muestra en la Fotografía 3. Se les preguntó, ¿qué tipo de triángulo se forma?, ¿qué nombre reciben sus lados? y se realizó un recordatorio de razones trigonométricas, con lo que obtuvieron las diferentes distancias a partir de la razón seno.



Fotografía 3

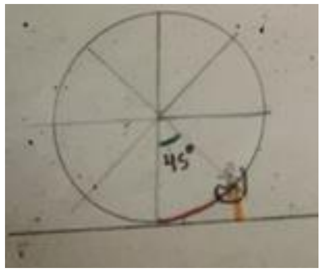
Fotografía 4



Fotografía 5

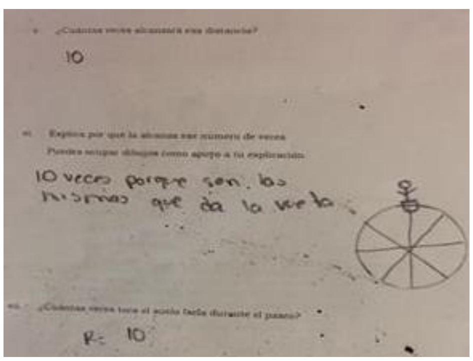
Actividad 3

En la actividad 3 los estudiantes primero dibujaron diferentes situaciones que representaban dónde se encontraba una persona en la rueda de la fortuna en diferentes posiciones y se les solicitó marcar de diferentes colores las distancias recorrida (arco del círculo) y las distancias al suelo, así como el ángulo central correspondiente en cada caso, como se observa en la Fotografía 6. Posteriormente se les hicieron una serie de preguntas como, si el paseo dura 12 minutos ¿cuántas vueltas daría una persona en el paseo?, ¿qué distancia recorre en una vuelta?, ¿qué distancia recorre en todo el paseo?, ¿Cuál es la mayor distancia al suelo que alcanza durante el paseo una persona?

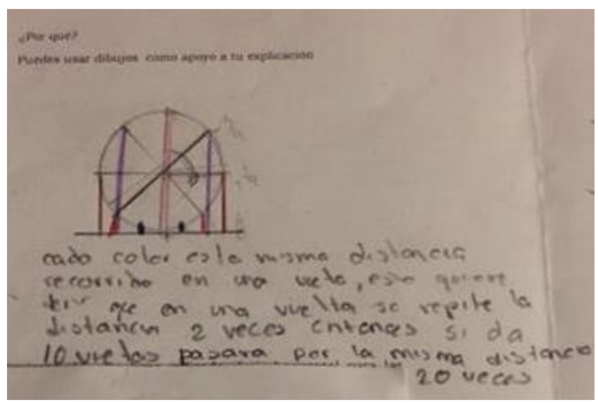


Fotografía 6

Posteriormente se les hacen preguntas como ¿cuántas veces alcanza la mayor distancia al suelo durante el paseo y por qué?, ¿cuántas veces toca el suelo durante el paseo y por qué?, se les pregunta además, si así como alcanzan varias veces esas distancias, ¿las otras alturas se repiten? y ¿por qué?, Fotografía 7 y 8.



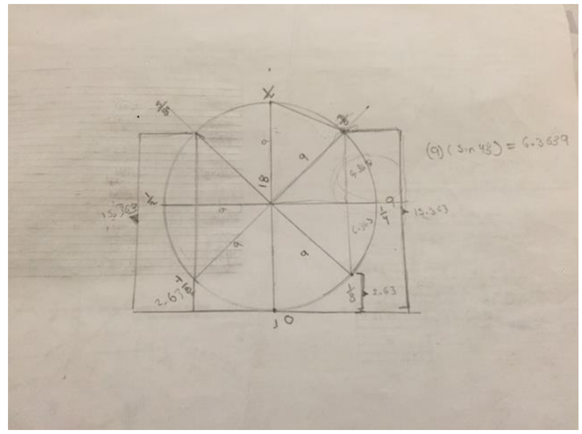
Fotografía 7



Fotografía 8

Finalmente se le pide realizar diferentes gráficas con los datos que primero aproximan y posteriormente calculan, Fotografía 9, los estudiantes desarrollaron diferentes formas de calcular las distancias, algunos con la razón coseno, como aparece en la fotografía.

Fotografía 9



Fotografía 10

Resultados. Hacia el análisis de los datos

Los estudiantes que llegaron al final de las actividades y presentaron sus resultados son un total de 35 y de sus registros e interacciones podemos identificar ya los elementos de la funcionalidad trigonométrica.

- Acercamiento variacional al movimiento, los estudiantes dan evidencia de este acercamiento cuando analizan cómo va cambiando la distancia recorrida durante una vuelta y observan que cada determinado ángulo la distancia recorrida aumenta proporcionalmente hasta completarla; por otro lado al analizar cómo cambia la distancia al suelo observan que no se da este mismo comportamiento, sino que aumenta hasta llegar a 18 y posteriormente disminuye. Por lo que al sacar la razón de cambio obtienen valores positivos y valores negativos y son capaces de explicar el por qué tanto en la gráfica obtenida como lo que le sucede a una persona en el juego de la rueda de la fortuna.
- Periodicidad, cuando los estudiantes identifican que en una vuelta de la rueda de la fortuna hay distancias que se repiten dos veces por vuelta y distancias que se obtienen una sola vez, por lo que en todo el paseo algunas se repiten en número de vuelta que dura el paseo, como la distancia máxima y mínima al suelo y el resto se repiten el doble del número de vueltas que se dan en un paseo.
- Lo acotado, al momento en que los estudiantes se dan cuenta que las distancias al suelo a las que se pueden encontrar durante el paseo en la rueda de la fortuna van de 0 a 18 metros del suelo.
- Unidad de medida, para identificar un instante en el recorrido de una vuelta, inician por indicar en qué parte de vuelta se encuentra la persona y después le asocian un ángulo central a esa parte de vuela en grados y algunos lo identifican con la fracción de π recorrida.
- Sin embargo, para hacer el análisis de cada uno en las actividades-tareas que propone la secuencia utilizaremos el modelo de anidación de prácticas de Cantoral (2013), en los niveles de *acción* y *actividad*, para identificar la(s) *práctica(s) socialmente compartida(s)* que se logra(n) con este diseño.

Reflexiones finales

En el estudio de esta intervención didáctica se trabajó con estudiantes del cuarto semestre con un diseño que demandaba la participación interactiva de los estudiantes, se pudo observar que un cambio de centración de los objetos (la matemática escolar) a las prácticas facilitó el desarrollo de una forma particular de pensamiento matemático y la participación interactiva de los estudiantes, con los saberes matemáticos, a partir de su quehacer, sus producciones, sus argumentaciones, sus explicaciones. Aquellos estudiantes que decidieron realizar las actividades lograron mostrar sus resultados a partir de sus explicaciones y argumentaciones, basadas éstas en su participación durante la experiencia. Sin embargo, hubo estudiantes que no trabajaron las actividades como se presentaron, si no que copiaron lo que hicieron sus compañeros. Estos estudiantes no lograron presentar resultados por falta de argumentos, eso provocó que algunos de ellos pidieran una nueva oportunidad y trabajaran en un periodo posterior al semestre, logrando finalmente lo que se buscaba. Consideramos que el cambio de actitud y dinámica de clase dependen de ese cambio de centración, de los objetos a las prácticas; es decir, que el rediseño del discurso matemático escolar provoca cambios en las relaciones didácticas, pedagógicas y escolares del sistema didáctico. Esto, planteamos, puede configurar lo que Cantoral (2013) denomina aula extendida y, en ese sentido, es posible el rediseño del discurso matemático escolar desde el aula, bajo ciertas condiciones.

Referencias

Beltrán, S. (2013). El papel de la modelación en el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico en estudiantes del nivel medio superior. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria. México.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24(2) 9-35. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525862001

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2014). *Precálculo, un enfoque visual*. México: Pearson Educación.

Confrey, J. y Maloney, A. (2007). A theory of Mathematical modeling in technological settings. En Artigue, M., Hodgson, B. R. (Eds.), *Modelling andaplications in Mathematics Education Vol*. (10), 57-67. U.S.: Springer.

Instituto de Educación Media Superior (2006), Programa de estudio de Matemáticas. (p.29). México, D.F.: IEMS.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Eds), Resignificación de funciones para profesores de matemáticas, 169-205. México: Ediciones Díaz de Santos.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138.

Moore, K. C., & LaForest, K. R. (2014). The circle approach to trigonometry. *Mathematics Teacher 107*(8), 616-623.

Ôzgun-Kara, A., Edwards, M. & Meagher M. (2013). Spaghetti sine curves. Virtual Enviroments for reasoning an sense making. *Mathematics Teacher 107*(3), 180-187.

Salinas, P., Alanís, J.A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J.C., & Garza, J.L. (2007). *Matemáticas Preuniversitarias: Significado de nociones y procedimientos*. México, D.F: Trillas.

Autores

María del Pilar Beltrán Soria; CICATA-Legaria. IPN. México; pilar.beltran@iems.edu.mx
Gisela Montiel Espinosa; CIVESTAV. México; gmontiele@cinvestav.mx